



LEZIONE # 15

Quando un motore o una macchina operatrice sono in funzione ed eseguono il lavoro per le quali sono state costruite, sulla cassa esterna si osserva spesso un *tremolio* più o meno accentuato. Se è possibile toccare la macchina con la mano, il tremolio si avverte chiaramente al tatto. Quando anche non fosse agevole osservarlo a vista, quasi sempre si ode un **rumore** fastidioso che, in taluni casi, può divenire assordante. Tale rumore è generato dalle parti meccaniche della macchina che sono in moto relativo tra loro a causa delle inevitabili interazioni e degli attriti che si generano durante tali movimenti. Le interazioni provocano dei *moti armonici* nei pezzi della macchina che, o sono visibili ad occhio, come un tremolio, o sono udibili sotto forma di rumore. Questi movimenti armonici non sono, in genere, funzionali al lavoro che le macchine devono svolgere, anzi sono responsabili di effetti fastidiosi e sono universalmente conosciute con il nome di **vibrazioni**.

Oltre al rumore, che è un effetto sempre fastidioso, il livello massimo del quale è regolamentato dalla normativa vigente, alle vibrazioni sono associati anche fenomeni dannosi e pericolosi, come la **fatica** dei pezzi meccanici coinvolti.

Le vibrazioni sono caratterizzate da una **ampiezza**, una **frequenza**, e una **forma d'onda**.

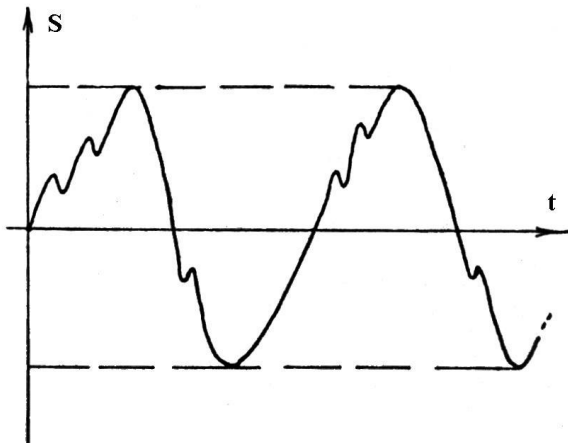


Figura 15.1

Una qualunque *forma d'onda periodica* può sempre essere sviluppata in *serie di Fourier*.

$$x(t) = x(t + 2\pi) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

Per lo studio delle vibrazioni è possibile quindi fare riferimento alle onde componenti, che sono delle sinusoidi pure:

$$\text{spostamento: } x(t) = X \sin \omega t = X e^{j\omega t}$$

$$\text{velocità: } v(t) = X \omega \cos \omega t = X \omega e^{j\omega t}$$

$$\text{accelerazione: } a(t) = -X \omega^2 \sin \omega t = -X \omega^2 e^{j\omega t}$$

Dalle relazioni appena scritte, si osserva che l'ampiezza della velocità è eguale al prodotto della pulsazione e dell'ampiezza dello spostamento ($X \cdot \omega$), ma è anche eguale all'ampiezza dell'accelerazione diviso la pulsazione ($X \omega^2 / \omega$).

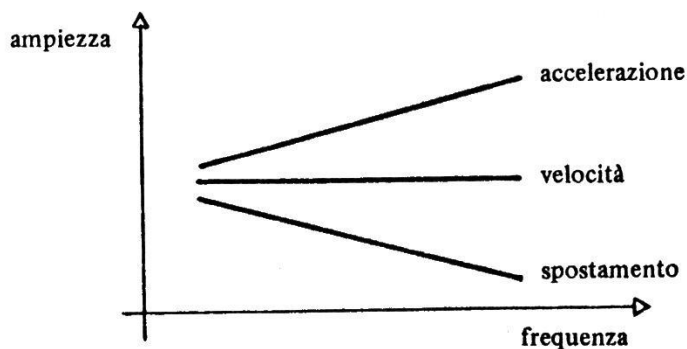


Figura 15.2

Per un sistema che è in vibrazione, a parità di energia fornita o sviluppata, rimane costante la quantità di moto del sistema stesso: $Q = m \cdot v = \text{cost}$.

L'ampiezza della velocità di vibrazione, rimane costante per ogni frequenza di vibrazione. Si riconosce che per ω basse è conveniente misurare direttamente lo spostamento della vibrazione mentre per ω crescenti conviene misurare le accelerazioni.



Questo ragionamento qualitativo verrà discusso più avanti. Il problema fondamentale per la misura delle vibrazioni è il reperimento di un *punto fisso* che possa essere considerato un *riferimento* per la posizione di tutti i punti della macchina che vibrano.

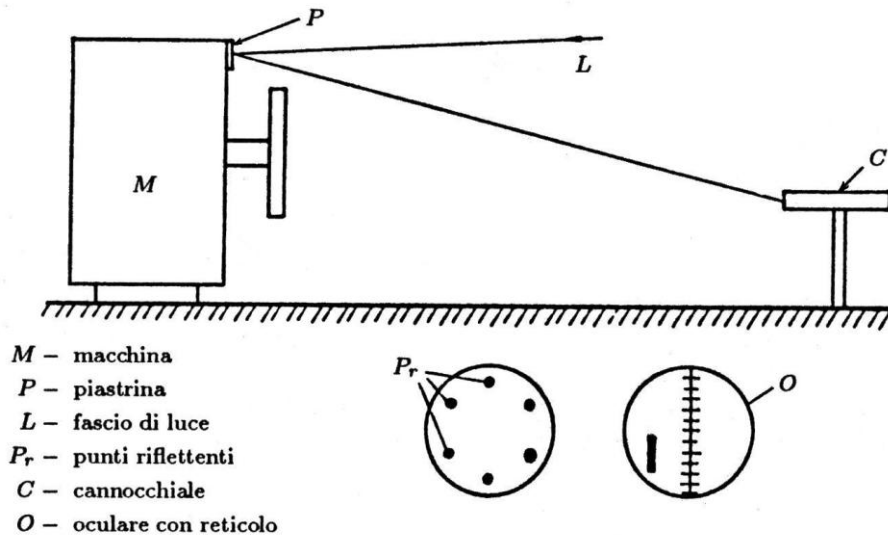


Figura 15.3

Si potrebbe pensare di applicare sulla macchina una piastrina con dei punti riflettenti, illuminare la piastrina con un raggio luminoso concentrato e, puntando la piastrina con un cannocchiale con oculare graduato, misurare a distanza gli spostamenti dei punti. Come evidenziato in figura 15.3, il cannocchiale deve essere posto ad una distanza tale da permettere che il terreno circostante la macchina possa assorbire e smorzare completamente le vibrazioni prodotte dalla macchina stessa.

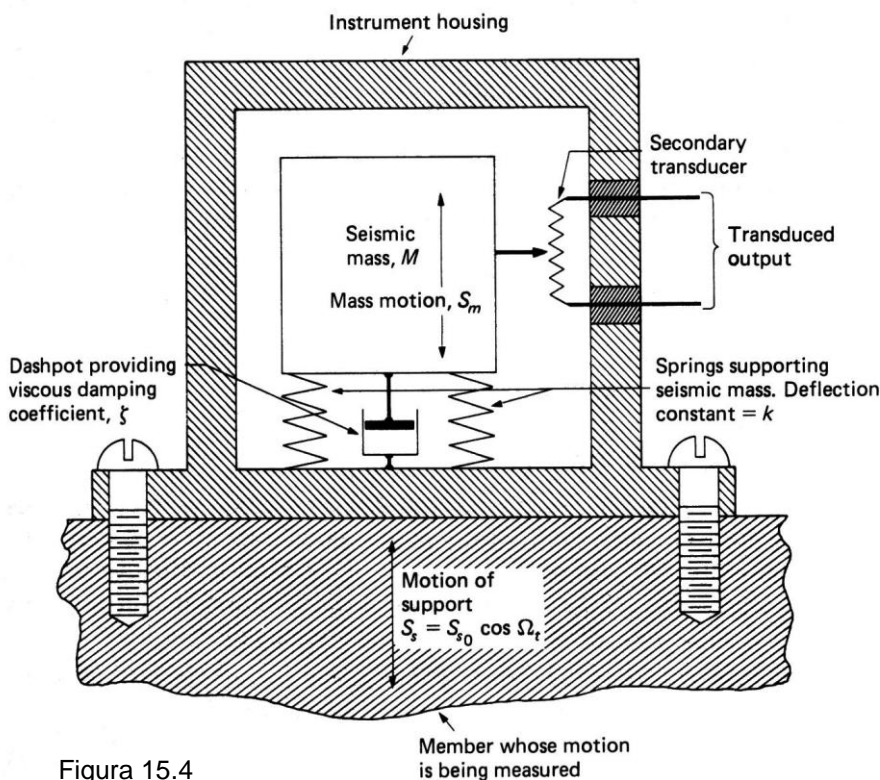


Figura 15.4

Un'idea del genere può essere efficace in talune circostanze, quando lo spazio libero circostante la macchina è tale da non ostacolare il cammino ottico del raggio luminoso dall'immagine verso il cannocchiale. Negli impianti industriali, tali condizioni sono verificate raramente. Inoltre, un metodo ottico così fatto permetterebbe di misurare solo le *ampiezze massime* e la direzione delle vibrazioni, e solamente quelle parallele al piano della piastrina. Ai fini di una misura soddisfacente questo risultato è troppo poco. Una soluzione per reperire un punto fisso di riferimento



a ridosso della macchina che vibra è fornita dai **trasduttori sismici**. Uno schema di principio per un trasduttore sismico è riportato sopra nella figura 15.4. Si tratta di un trasduttore la cui cassa esterna è rigidamente connessa con la cassa della macchina che vibra. All'interno del trasduttore è posta una **massa sismica** m , collegata alla cassa per mezzo di una molla k e di uno smorzatore viscoso c . Durante la vibrazione della macchina, il movimento interno della massa sismica m è rilevato in modo opportuno (vedi più avanti).

Quello che si vuole misurare è lo spostamento $u(t) = U_o \sin \omega t$, cioè la vibrazione della macchina M , indicata nella figura 15.5 sulla "scala immaginaria" u a destra.

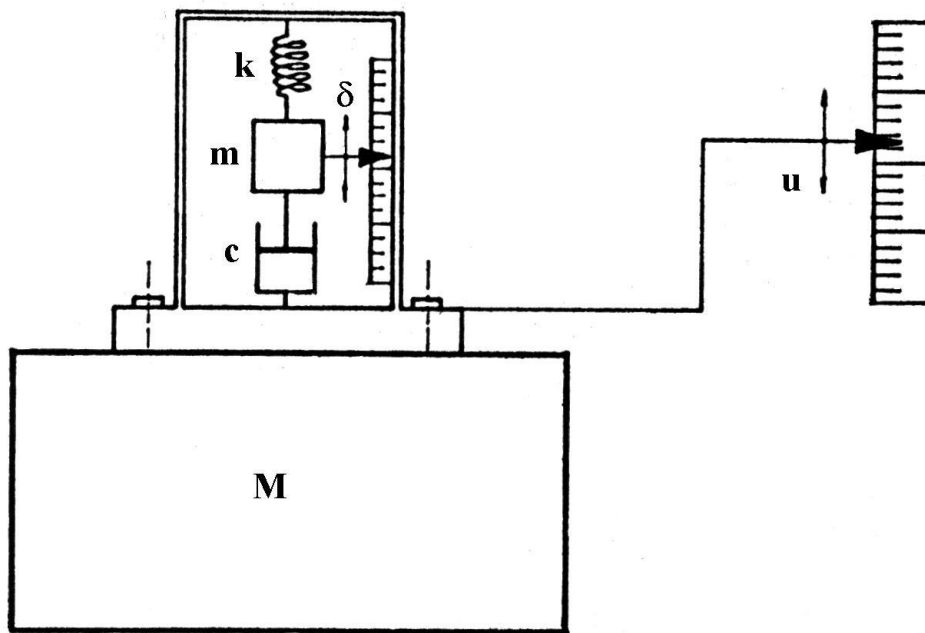
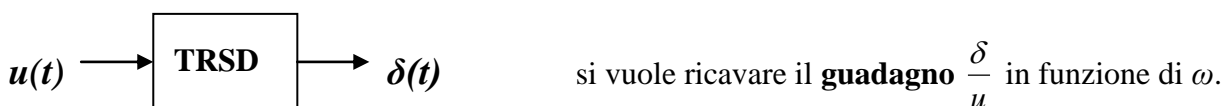
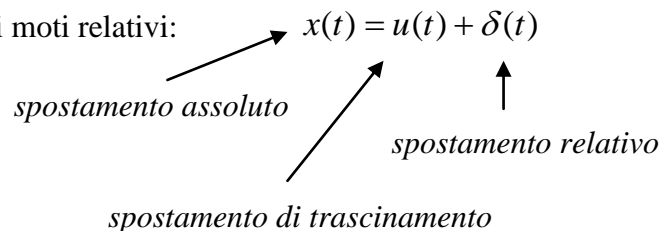


Figura 15.5

Nella realtà, in uscita dal trasduttore, si dispone solamente del segnale che rappresenta lo spostamento $\delta(t)$, indicato in figura 15.5 sulla "scala reale" interna al trasduttore. Occorre quindi impostare lo studio dinamico del trasduttore considerando le grandezze in ingresso e in uscita schematizzate sotto nel diagramma a blocchi:



Per la massa sismica m vale il teorema dei moti relativi:



Poiché il termine inerziale è sempre riferito allo spostamento nel "sistema di riferimento assoluto" (la terra), mentre i termini di smorzamento viscoso e di richiamo elastico sono riferiti al sistema relativo (la cassa del trasduttore), l'equazione del moto della massa m risulta:



$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{d\delta}{dt} + k\delta = 0$$

$$m \frac{d^2}{dt^2}(\delta + u) + c \frac{d\delta}{dt} + k\delta = 0$$

$$m \frac{d^2 \delta}{dt^2} + c \frac{d\delta}{dt} + k\delta = -m \frac{d^2 u}{dt^2} = -m(-\omega^2 U_o \text{sen}\omega t) = m\omega^2 u(t)$$

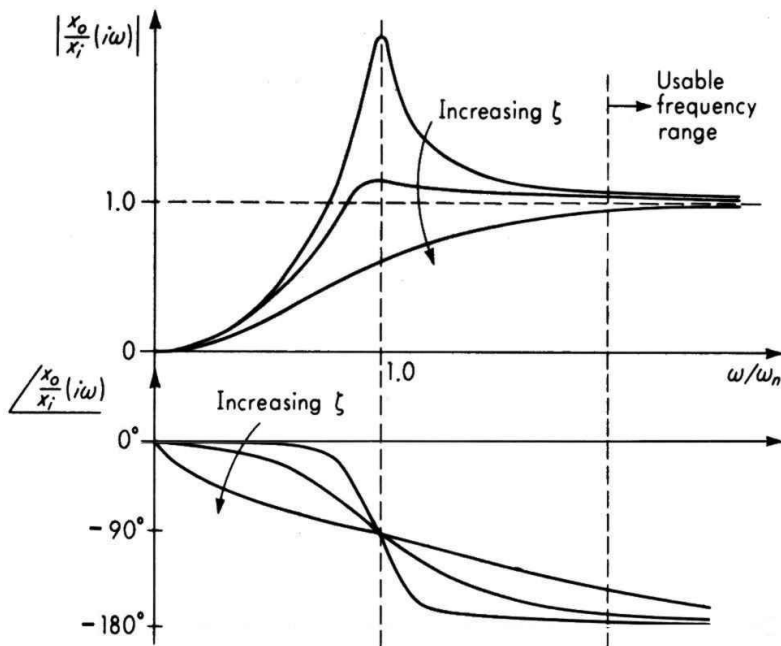
si riconosce come la forzante di questo trasduttore è proporzionale allo spostamento relativo $u(t)$. Ci si ritrova di fronte ad un *sistema dinamico del 2° ordine* con una forzante "particolare". La soluzione di questo sistema, però, è del tutto analoga alla soluzione trovata per gli strumenti del 2° ordine con forzante sinusoidale semplice già studiati nella lezione dedicata alla rapidità:

$$X_0 = \frac{F_o}{k} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\xi^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

nel caso del trasduttore sismico, l'ampiezza della forzante risulta: $F_o = m\omega^2 U_o$ vale quindi

$\frac{F_o}{k} = \frac{m\omega^2 U_o}{k} = \frac{\omega^2 U_o}{k/m} = \frac{\omega^2 U_o}{\omega_n^2}$ per l'ampiezza dell'uscita δ_0 si ottiene quindi la relazione:

$$\delta_0 = U_o \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\xi^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad \text{risposta in frequenza dello spostamento relativo !}$$



Seismic-displacement-pickup frequency response.

Figura 15.6

Si ricorda che l'ampiezza indicata sopra è l'ampiezza dell'*integrale particolare* $\delta(t) = \delta_o \text{sen}(\omega t + \varphi)$ che verifica l'equazione dinamica del trasduttore, rappresentativa del moto della massa m .

Le curve di *risposta in frequenza* normalizzate del guadagno e della fase per questo particolare strumento del 2° ordine, sono riportate a lato nella figura 15.6.

Si riconosce che per $\omega \gg \omega_n$ il

guadagno $\frac{\delta_o}{U_o} \cong 1$ tende ad *uno* e

lo sfasamento è $\varphi \cong -180^\circ$.

Considerando le implicazioni sul funzionamento del trasduttore, avere un "guadagno unitario" e



“opposizione di fase”, significa che quando l’oscillazione della macchina $u(t)$ è in un punto di *massimo* lo spostamento relativo della massa sismica $\delta(t)$ è in un punto di *minimo* e viceversa. In definitiva, rispetto al sistema di riferimento assoluto, la massa m interna al trasduttore è ferma. Nelle condizioni indicate, viene realizzato il *punto fisso di riferimento* che coincide con la massa sismica m .

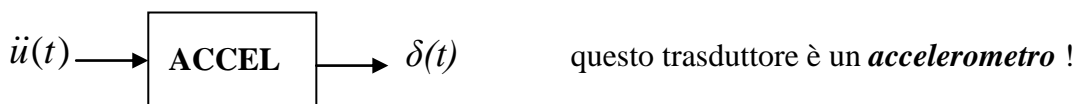
Si faccia attenzione al fatto che dire $\omega \gg \omega_n$ significa dire che, per poter utilizzare il trasduttore sismico in un campo di frequenze realmente utili, deve essere $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ *piccola*, ovvero $k \rightarrow$

piccola ed $m \rightarrow$ *grande*. Nella pratica, non è facile realizzare “contemporaneamente” le due ipotesi in quanto, è tecnicamente complicato sostenere una massa grande all’interno del trasduttore con una molla soffice. Inoltre, dal punto di vista strettamente misuristico, avere una massa m grande che si aggiunge alla massa M della macchina, provoca una modifica nei *modi di vibrare* della macchina stessa, ovvero produce un *errore d’inserzione* che, nella gran parte delle applicazioni, non è tollerabile.

Dalle considerazioni appena esposte discende che un trasduttore sismico così fatto può essere utilizzato per la misura degli spostamenti della vibrazione solo in casi particolari. Un trasduttore rappresentato bene dallo schema matematico fin qui studiato, prende il nome di **vibrometro**.

Nella pratica, l’ideale sarebbe avere a disposizione un trasduttore con massa $m \rightarrow$ *piccola* e rigidezza $k \rightarrow$ *elevata*, ma questa soluzione comporta sempre una pulsazione naturale $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ *elevata*. Occorre cambiare metodo: si deve misurare la vibrazione nella regione in cui $\omega \ll \omega_n$ e, poiché in tale regione l’amplificazione è molto bassa e non è neppure costante, si deve rinunciare ad utilizzare un trasduttore che abbia una risposta in frequenza come quella del vibrometro.

Quanto appena detto, significa anche che si è costretti a rinunciare alla misura degli *spostamenti* $u(t)$ e si deve passare alla misura delle *accelerazioni* $\ddot{u}(t)$.



Infatti, essendo: $\ddot{u}(t) = -\omega^2 \cdot U_o \cdot \sin \omega t$ risulta per le ampiezze: $\ddot{U}_o = \omega^2 U_o$ ovvero $U_o = \frac{\ddot{U}_o}{\omega^2}$ che, inserita nella relazione della risposta in frequenza del vibrometro, che esprime l’ampiezza dell’uscita in funzione della frequenza, dà luogo alla relazione seguente:

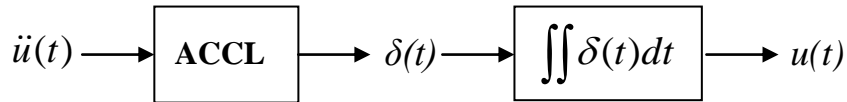
$$\delta_o = U_o \cdot \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\xi^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} = \frac{\ddot{U}_o}{\omega^2} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\xi^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

Con un trasduttore concettualmente costruito con gli stessi elementi meccanici del vibrometro (m, c, k), ma utilizzato per misurare “l’accelerazione della vibrazione”, si ottiene un guadagno:

$$G = \frac{\delta_o}{\ddot{U}_o} = \frac{1}{\omega_n^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\xi^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad \text{che è la risposta in frequenza dell'accelerometro.}$$



A questo punto, se si è interessati a conoscere gli spostamenti della vibrazione, occorre aggiungere in uscita all'accelerometro uno stadio che esegua la *doppia integrazione analogica* del segnale:



La curva di risposta in frequenza per un accelerometro tipico è riportata sotto nella figura 15.7. Si riconosce facilmente come la banda passante, sia posizionata ora alla sinistra della frequenza naturale ω_n .

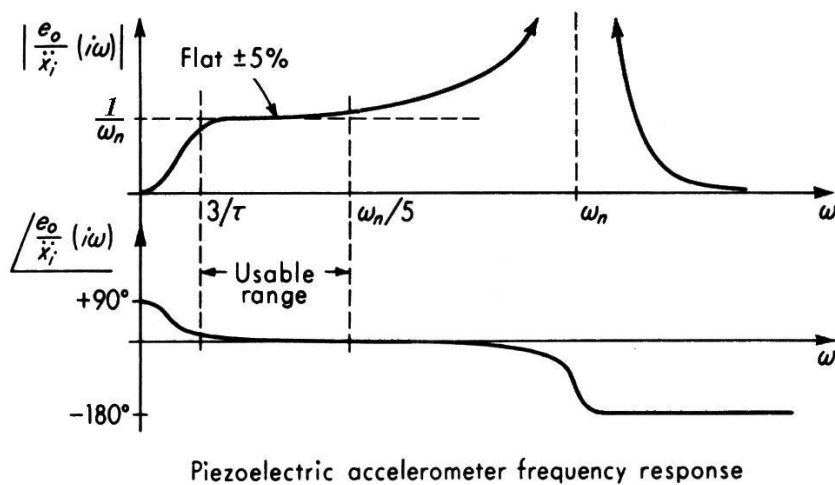
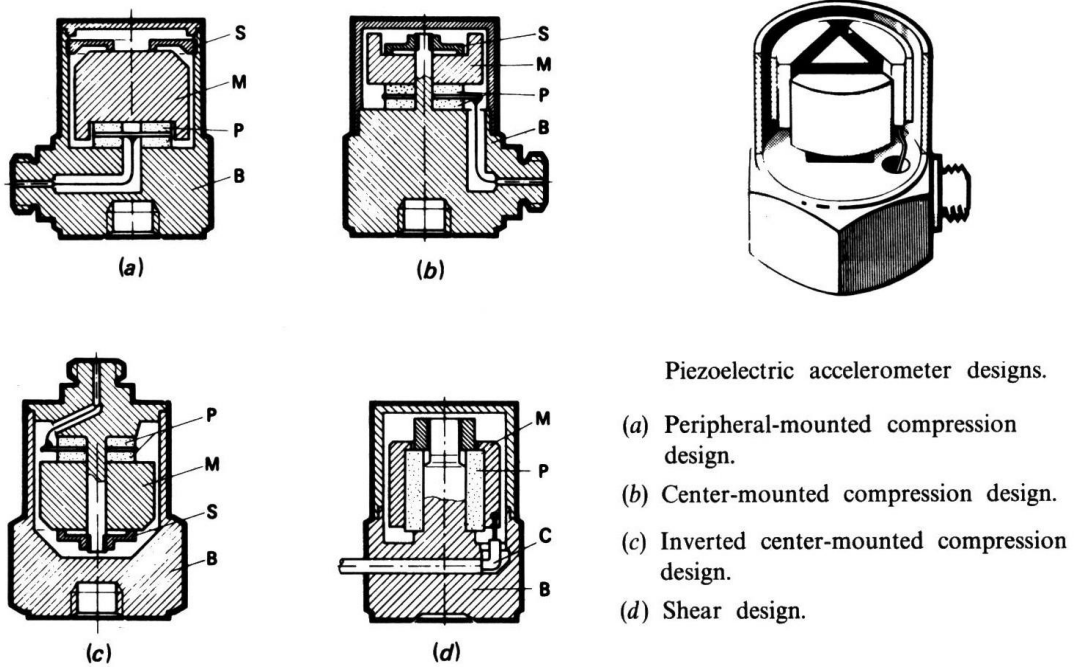


Figura 15.7

Sul grafico e dalla funzione che esprime il guadagno si osserva che, all'aumentare di ω_n aumenta l'estensione della banda passante ma diminuisce il guadagno $\frac{\delta_o}{\ddot{U}_o}$, ovvero a parità di ampiezza dell'accelerazione in ingresso, diminuisce l'ampiezza del segnale in uscita dal trasduttore. In altri termini, questa circostanza corrisponde ad una *diminuzione della sensibilità* dell'accelerometro. In generale, non è tecnicamente facile rilevare con una massa sismica di pochi grammi una vibrazione ad alta frequenza, che ha quindi ampiezze δ_o molto piccole. Un tale compito viene assolto egregiamente dagli **accelerometri piezoelettrici**. Alcuni esempi reali (spaccati) di accelerometri piezoelettrici sono riportati sotto nella figura 15.8.



Piezoelectric accelerometer designs.

- (a) Peripheral-mounted compression design.
- (b) Center-mounted compression design.
- (c) Inverted center-mounted compression design.
- (d) Shear design.

S: Spring M: Mass P: Piezoelectric element B: Base C: Cable
(Courtesy Bruel and Kjaer Instruments, Marlboro, Mass.)

Figura 15.8

Come evidenziato sopra nella figura 15.8, l'elemento fondamentale degli accelerometri piezoelettrici è il *cristallo di quarzo piezoelettrico*, riportato invece qui sotto nella figura 15.9 :

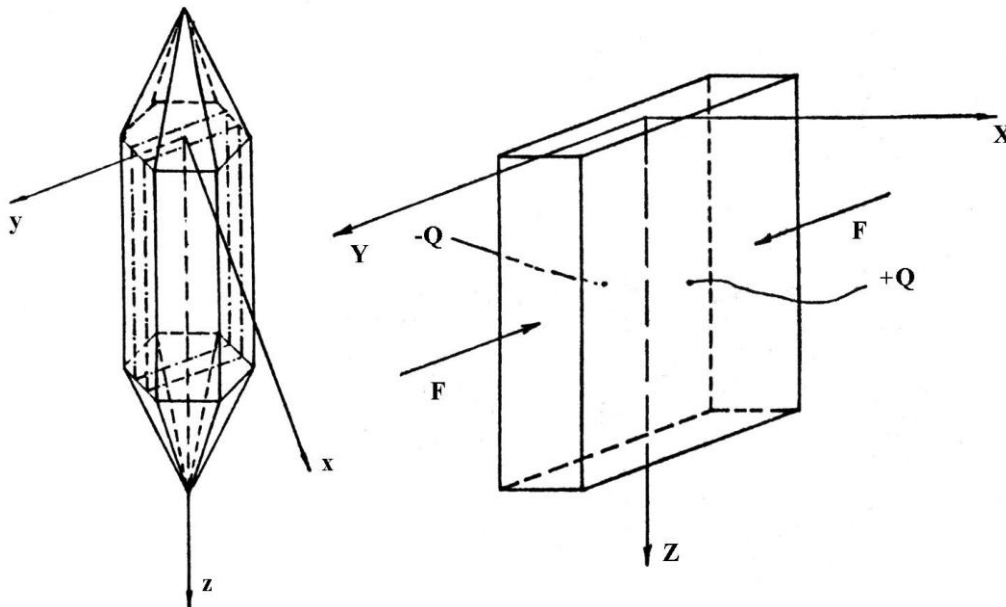


Figura 15.9

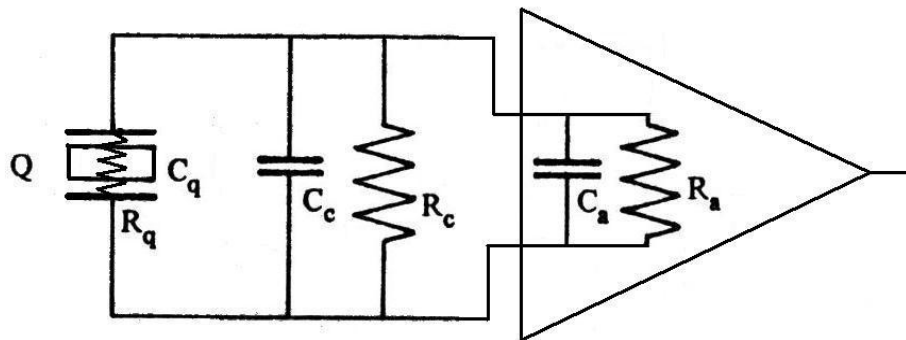


Figura 15.10

Considerando la piccolissima quantità di cariche Q in gioco, è corretto ipotizzare una perdita di segnale dovuta a due cause: per *manca di isolamento* del cavetto (R) e per *accoppiamento capacitivo* tra i conduttori del cavetto (C).

Si riconosce nello schema che gli elementi di dispersione sono tutti in parallelo: a cominciare dal cristallo piezoelettrico stesso (R_q e C_q), per passare al cavo di collegamento (R_c e C_c) e per finire con gli ingressi dell'amplificatore (R_a e C_a). Gli elementi citati partecipano tutti alla "dissipazione" del piccolissimo segnale che si ha a disposizione.

Per gli elementi passivi, valgono le relazioni del parallelo richiamate qui di seguito:

Capacità: $C = C_q + C_c + C_a$

Resistenze: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_q} + \frac{1}{R_c} + \frac{1}{R_a}$ $R = \frac{R_q R_c R_a}{R_c R_a + R_q R_a + R_q R_c}$

In pratica, è come se ci si trovasse di fronte al circuito RC equivalente della figura 15.11 sotto.

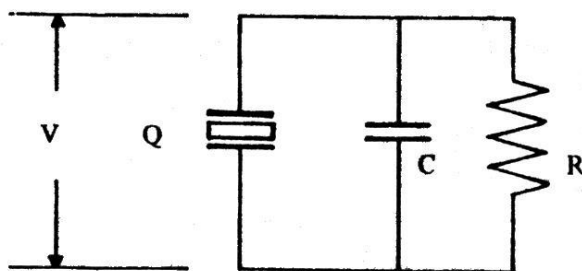


Figura 15.11

Il fenomeno della dissipazione delle cariche, in prima approssimazione, può essere schematizzato come un condensatore equivalente che si scarica su di una resistenza equivalente. E' come essere in presenza di un *sistema elettrico del 1° ordine* che si scarica con legge esponenziale: $V(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$

Per "mantenere vivo" il segnale $V(t)$, la costante di tempo $\lambda = RC$ deve essere molto maggiore del periodo del segnale da misurare. In caso contrario, gli accoppiamenti capacitivi "scaricano il segnale per strada" prima che esso possa essere rilevato e amplificato.

Purtroppo, anche utilizzando cavetti speciali per il collegamento degli accelerometri agli amplificatori, le capacità di dispersione e le resistenze di cortocircuito del cristallo (C_q e R_q) e del cavo (C_c e R_c) rimangono quelle che sono, si agisce quindi sull'ingresso dell'amplificatore (C_a e R_a). I trasduttori piezoelettrici vengono collegati ad Amplificatori Operazionali con stadio d'ingresso a FET, che hanno una impedenza d'ingresso $Z_{in} = 10^{12} \Omega$. Per rendere il segnale

indipendente dalla capacità del cavo si utilizza un amplificatore operazionale (AO) con ingresso a FET e un condensatore collegato sul ramo di controreazione, come indicato sotto nella figura 15.12:

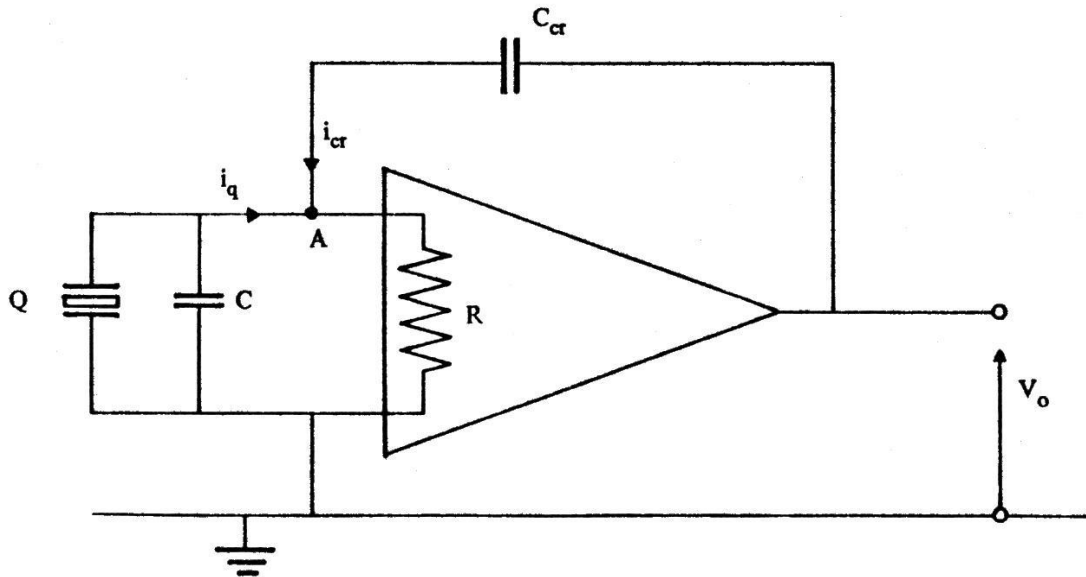


Figura 15.12

Si tenga presente che la curva di graduazione $V = \frac{dk_{ij}m}{\epsilon_0\epsilon_r S} \cdot \ddot{y}$ è stata ricavata senza tenere conto del fatto che il quarzo è pur sempre un elemento elastico (con un suo modulo di Young E elevatissimo) e che le cariche Q si rendono disponibili sulle facce del cristallo a causa di una *dissimetria elettrica* interna, dovuta proprio alle piccolissime deformazioni ϵ del cristallo. Le deformazioni a loro volta sono provocate dalle forze d'inerzia della massa sismica m che agiscono durante la vibrazione.

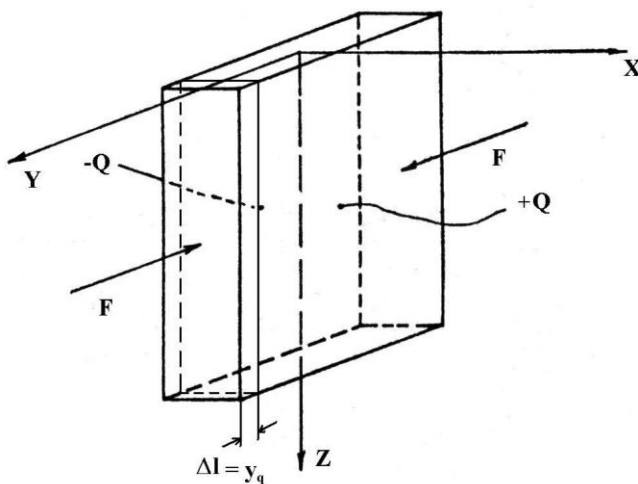


Figura 15.13

Con riferimento alla figura 15.13 vale cioè:

$$Q = k_{ij} \cdot F = k_{ij} \cdot S \sigma = k_{ij} \cdot S \cdot E \epsilon = k_{ij} \cdot SE \cdot \frac{\Delta l}{l}$$

$$Q = \frac{k_{ij} SE}{l} \cdot y_q$$

nel nodo A della figura 15.12 sopra, si ha somma delle correnti nulla: $i_q = -i_f$

$$i_q = \frac{dQ}{dt} = K \cdot \dot{y}_q \quad \text{essendo} \quad \frac{k_{ij} SE}{l} = \cos t = K$$

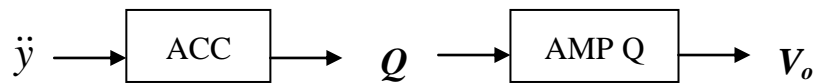
$$i_f = C_f \frac{dV_o}{dt} = C_f \cdot \dot{V}_o$$

quindi: $K \cdot \dot{y}_q = -C_f \cdot \dot{V}_o$ e integrando ambo i membri $K \cdot y_q = -C_f \cdot V_o$ da cui resta

$$V_o = -\frac{K}{C_f} \cdot y_q = -\frac{k_{ij} SE}{l C_f} \cdot y_q \quad \text{che è la curva}$$



di graduazione dell'insieme *accelerometro + amplificatore di carica* rappresentati nel diagramma a blocchi sotto.



La *risposta in frequenza* dell'insieme *accelerometro + amplificatore di carica* è proprio quella riportata a proposito degli accelerometri piezoelettrici nella figura 15.7 precedente.

Si osservi che, poiché la costante di tempo $\lambda = RC$ deve avere comunque un valore finito, questi trasduttori non sono in grado di rilevare segnali rigorosamente costanti (per $\omega = 0$). Si hanno infatti due frequenze di taglio che delimitano la banda passante, una inferiore e una superiore.

Gli accelerometri piezoelettrici sono tarati uno per uno, circostanza che ne fa lievitare considerevolmente il costo. Il costruttore fornisce all'utente il valore della sensibilità, espressa in $[pC/ms^{-2}]$ e la curva di risposta in frequenza, un esempio reale della quale è riportato qui sotto nella figura 15.14.

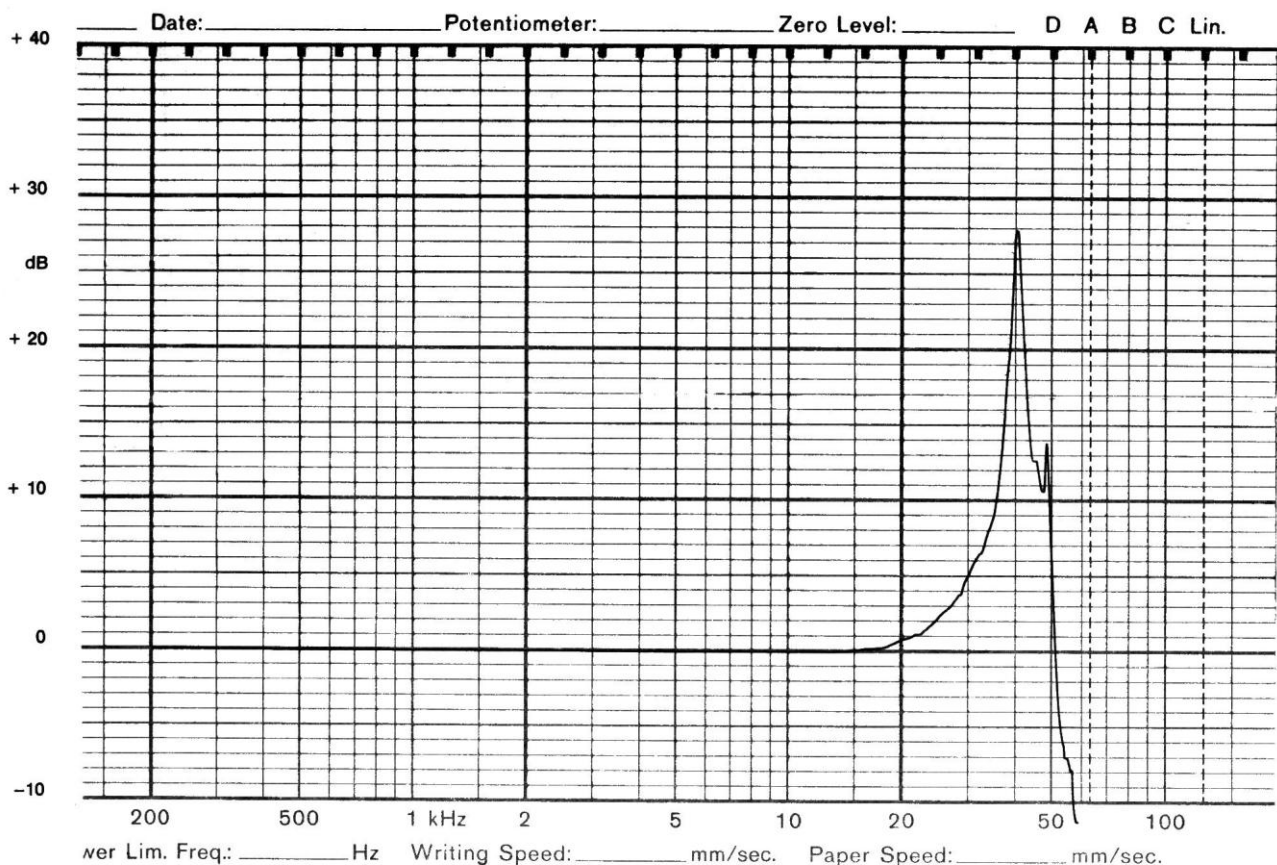


Figura 15.14



Note:

Figure 15.1, 15.2, 15.3, 15.5, 15.9, 15.10, 15.11, 15.12 courtesy of:
Branca F.P. – *Misure Meccaniche* – ed. ESA

Figure 15.6, 15.7 courtesy of:
Doebelin E.O. – *Measurement systems, application and design* – McGraw Hill

Figure 15.4, 15.8 courtesy of:
Bechwith, Marangoni, Lienhard – *Mechanical Measurements* – Addison & Wesley